المملكة المغربية

ROYAUME DU MAROC



Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur, de la Formation des Cadres et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun
École Mohammadia d'Ingénieurs



CONCOURS NATIONAL COMMUN
d'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

Session 2014

ÉPREUVE DE PHYSIQUE II

Filière **MP**

Durée : **4** heures

Cette épreuve comporte 8 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est ***autorisé***

- *On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les* références *des questions abordées.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- *Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.*
- *Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.*

Spectromètre à fibre optique

Le spectromètre numérique à fibre optique est un outil courant en énergétique pour analyser la lumière émise par un corps ou transmise à travers un milieu afin de déterminer certaines caractéristiques (température, composition, etc) du corps ou du milieu. Il est basé principalement sur les propriétés d'un système dispersif, le réseau plan. La lumière à analyser est transmise au spectromètre par l'intermédiaire d'une fibre optique. Un premier miroir sphérique concave (dit de collimation) permet de collimater le faisceau issu de la fente d'entrée et de le diriger avec le bon angle sur le réseau. La lumière diffractée par ce réseau est ensuite focalisée par un second miroir sphérique (dit de focalisation) vers une barrette CCD, sur laquelle se forme le spectre. La barrette CCD fournit un signal électrique reproduisant l'intensité lumineuse perçue par ses différents pixels. Ce signal analogique est ensuite converti en signal numérique. Les données sont alors traitées par un logiciel pour afficher la courbe d'intensité spectrale $I(\lambda)$.

Dans ce problème, nous étudierons les différentes composantes du spectromètre numérique à fibre optique. Les différentes parties de ce problème sont largement indépendantes.

1. Miroir sphérique

On considère un miroir sphérique concave (M) de focale $100\,mm$, de centre C, de sommet S et d'axe optique (Cz). On rappelle que, dans les conditions de Gauss, la position d'un point objet A sur l'axe et celle de son image A' sont reliées par la relation $\dfrac{1}{\overline{SA}} + \dfrac{1}{\overline{SA'}} = \dfrac{2}{\overline{SC}}$.

1.1. Où se trouvent les foyers objet F et image F' principaux du miroir ? Donner l'expression de la distance focale du miroir définie par $f_1' = \overline{SF'}$. En déduire la valeur numérique du rayon R du miroir.

1.2. Que se passe-t-il pour un rayon incident passant par C ?

1.3. On considère un petit objet AB dans un plan perpendiculaire à l'axe optique. Le point A est sur l'axe optique à la distance SA ($SA > 2R$) du sommet du miroir et le point B au-dessus de l'axe. Construire soigneusement l'image $A'B'$ de AB par le miroir (M).

1.4. Définir le grandissement transversal et l'exprimer en fonction de $\overline{SA}$ et de $\overline{SA'}$.

1.5. L'objet AB, toujours perpendiculaire à l'axe optique, est tel que $A \equiv F'$. Faire la construction soignée et détaillée donnant son image par le miroir.

1.6. Faire une construction soignée et détaillée donnant l'image $A'B'$ d'un objet AB situé à l'infini, perpendiculaire à l'axe optique, vu sous un angle α et tel que A se trouve sur l'axe optique. Déterminer la nature et la taille de l'image.

2. Réflexion totale

On considère un rayon lumineux issu d'une radiation monochromatique et arrivant sur l'interface plane séparant deux milieux d'indices de réfraction différents (notés n_1 et n_2 avec $n_1 > n_2$) sous un angle d'incidence i_1 par rapport à la normale à l'interface (figure 1).

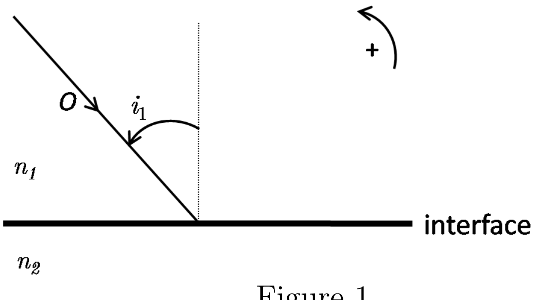


Figure 1

2.1. Énoncer les lois de Snell-Descartes de la réfraction lumineuse.

2.2. Au moyen de figures claires, exposer les différentes situations que l'on peut observer lors de la réfraction d'un rayon lumineux traversant l'interface plane. Préciser selon les cas les conditions d'existence du rayon réfracté. Montrer que si $i_1 > i_0$, le rayon incident est entièrement réfléchi. Donner l'expression de $\sin(i_0)$ et calculer, en degré, la valeur numérique de i_0. On donne $n_1 = 1,450$ et $n_2 = 1,433$.

3. Fibre optique

La fibre optique à saut d'indice (figure 2) est formée d'un cœur cylindrique en plastique d'axe Oz, transparent, homogène et isotrope, de rayon $a_c = 31,25\,\mu m$ et d'indice de réfraction constant $n_c = 1,450$, entouré d'une gaine d'indice de réfraction constant $n_g = 1,433$.

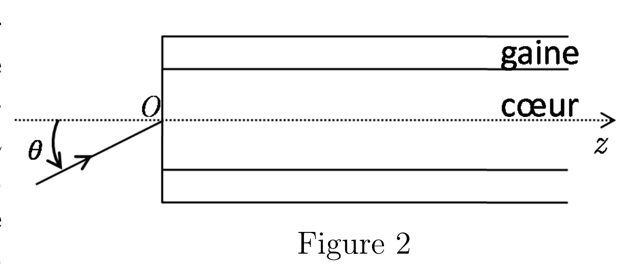


Figure 2

La face d'entrée de la fibre optique est plane, perpendiculaire à son axe de symétrie Oz et se trouve dans l'air d'indice de réfraction $n_a = 1,000$. Un rayon lumineux émis par une source monochromatique atteint la face d'entrée de la fibre en O, sous l'angle d'incidence θ. Les propriétés d'une fibre cylindrique à saut d'indice peuvent être analysées en bonne approximation en se limitant aux directions de propagation qui se trouvent dans un plan de symétrie de la fibre.

3.1. Justifier que le rayon lumineux transmis dans la fibre optique reste dans le même plan défini par le rayon entrant dans la fibre et l'axe Oz.

3.2. Pour qu'un rayon soit guidé dans la fibre optique, il faut que sa direction à l'entrée se situe dans un cône dit d'acceptance de demi angle au sommet θ_0. Montrer que si θ reste inférieur à un angle θ_0, un rayon peut être effectivement guidé dans le cœur de la fibre.

3.3. Exprimer littéralement et numériquement l'ouverture numérique ON de la fibre, définie par $n_a.\sin(\theta_0)$.

3.4. Quel est le devenir d'un rayon lumineux hors du cône d'acceptance ?

3.5. Faire un dessin du trajet ultérieur du rayon lumineux atteignant la face d'entrée de la fibre optique en O, sous l'angle d'incidence $\theta < \theta_0$ en faisant apparaître plusieurs réflexions.

3.6. On considère maintenant un rayon lumineux en dehors du cône d'acceptance de la fibre optique. Comme il frappe l'interface cœur/gaine à un angle inférieur à l'angle critique de réflexion sur cette interface, il peut pénétrer dans la gaine. À quelle condition peut-il se propager par réflexions totales à la surface extérieure de la gaine ?

3.7. Cette propagation donne naissance à un mode de propagation parasite, appelé mode de gaine. Ces modes sont généralement rapidement atténués, mais ils peuvent néanmoins être à l'origine de perturbations sur la fibre optique. Montrer, schéma à l'appui, que l'on peut les éliminer immédiatement, en entourant la gaine d'une enveloppe dont l'indice est supérieur à celui de la gaine.

3.8. La gaine est légèrement absorbante. La puissance absorbée par une tranche de longueur dz de la fibre est proportionnelle à l'épaisseur dz de cette tranche et à la puissance $P(z)$ du faisceau à l'entrée de celle-ci. On définit le coefficient d'atténuation de la fibre optique par $\beta = \dfrac{10}{L}.\text{Lg}(\dfrac{P(O)}{P(L)})$, Lg désigne le logarithme décimal. Le constructeur de la fibre indique pour celle-ci un coefficient d'atténuation $\beta = 0,4\,dB.km^{-1}$.

Montrer que le produit $10.\text{Lg}(\dfrac{P(O)}{P(z)})$ est proportionnel à z, distance parcourue par le faisceau dans le cœur de la fibre. Calculer la puissance du faisceau lumineux après un parcours de $1\,m$ puis $1\,km$ à l'intérieur de la fibre ? La puissance injectée à l'entrée de la fibre est $P(O) = 1\,\mu W$ et on néglige les pertes à l'entrée et à la sortie de la fibre. Conclure sachant que la longueur de la fibre utilisée pour un spectromètre à fibre optique est de l'ordre du mètre.

3.9. L'utilisation pratique de la fibre peut lui imposer de prendre des courbures. La fibre cesse alors d'être rectiligne et le guidage des rayons peut être confronté à un problème. On souhaite déterminer un ordre de grandeur de la courbure acceptable par une fibre à saut d'indice. On envisage alors un rayon lumineux confondu avec l'axe du cœur de la fibre optique dans la partie rectiligne de la fibre (figure 3).

On note R_c le rayon de courbure de la fibre dans sa partie supposée circulaire de centre C.
Calculer l'angle β que fait le rayon avec la normale lorsqu'il rencontre l'interface gaine/cœur.
Déterminer la valeur limite R_{cm} de R_c pour que le rayon envisagé reste effectivement guidé.

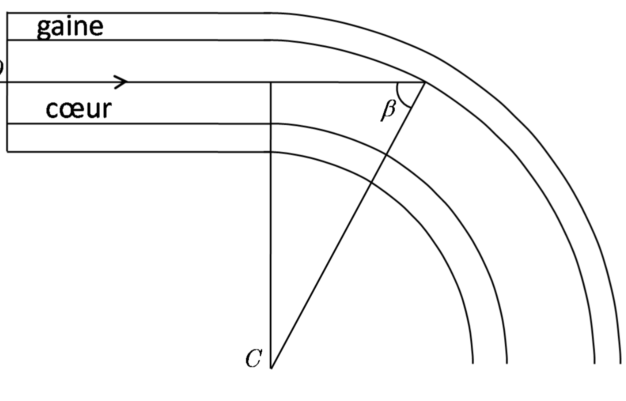


Figure 3

Exprimer R_{cm} en fonction du rayon du cœur a_c, n_c et n_g et calculer sa valeur numérique.

4. Étude d'un réseau par réflexion

On distingue les réseaux par transmission, pour lesquels les ouvertures sont des fentes transparentes, et les réseaux par réflexion pour lesquels les fentes sont remplacées par des miroirs.

Un réseau (R) plan par réflexion de largeur utile l est constitué de N traits (bandes) réfléchissants de faible largeur par rapport à leur dimension perpendiculaire au plan de la figure (figure 4). Les traits parallèles sont équidistants de a (pas du réseau). Le réseau comporte $n = 600\, traits.mm^{-1}$ et plonge dans l'air dont l'indice sera pris égal à $n_a = 1,000$.

La fente d'entrée du spectromètre, supposée infiniment fine et parallèle aux traits du réseau, est éclairée sous incidence nulle par la lumière transmise par la fibre optique.

4.1. Quel est le rôle d'un réseau de diffraction ?

4.2. Quelle relation y a-t-il entre a et n ?

4.3. Les rayons issus de la fente d'entrée du spectromètre sont parallèles après réflexion sur le miroir de collimation. À quelle condition cela est-il réalisé ?

On note φ l'angle d'incidence des rayons lumineux sur le réseau, φ' leur angle de réflexion. Les angles sont orientés de la normale au réseau vers le rayon (figure 4).

4.4. Déterminer, schéma à l'appui, la différence de marche δ entre les rayons diffractés par deux traits consécutifs du réseau en fonction de φ, φ' et a.

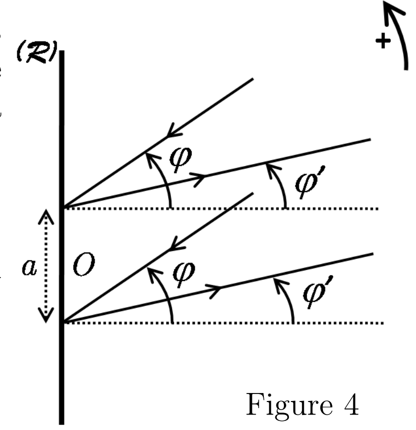


Figure 4

4.5. Pour quelles valeurs de δ l'interférence des rayons diffractés est constructive ? En déduire que les angles φ'_p d'ordre p dans lesquels on observe des

maxima de lumière pour une longueur d'onde λ donnée sont donnés par la relation : $\sin(\varphi'_p) + \sin(\varphi) = np\lambda$. Commenter la direction de l'ordre 0.

4.6. La fibre optique est maintenant éclairée par une source de lumière blanche de longueurs d'onde extrêmes $\lambda_B = 400\,nm$ et $\lambda_R = 800\,nm$. Quels sont les angles φ'_B et φ'_R de diffraction d'ordre $p = 1$ des deux longueurs d'onde extrêmes du visible ? On suppose que le réseau est éclairé sous incidence normale.

4.7. La partie interne du spectromètre est décrite dans la figure 5 pour un rayon lumineux sous incidence quelconque.

On note (M_c) et (M_f) les miroirs respectivement de collimation et de focalisation. (F_e) est la fente d'entrée du spectromètre.

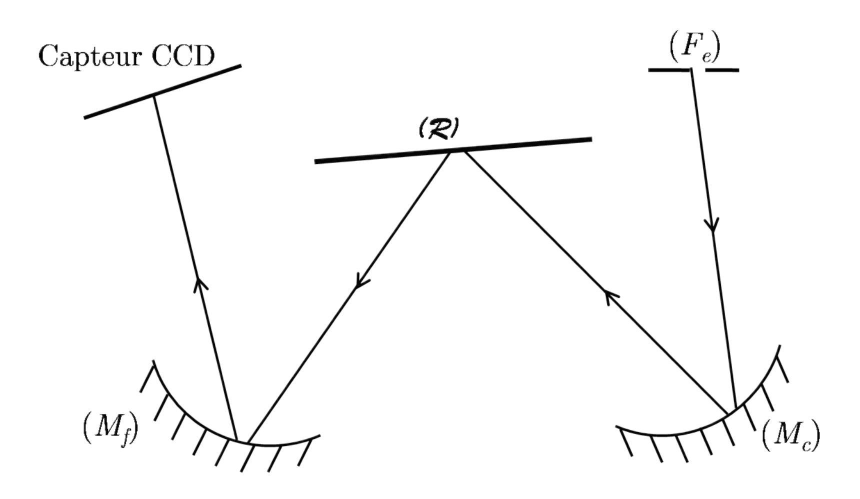


Figure 5

4.7.1. Dire, en justifiant où doit-on placer le capteur CCD pour enregistrer le spectre de la lumière analysée.

4.7.2. Représenter alors sur un schéma les marches respectives des rayons rouge et bleu depuis la fente d'entrée jusqu'au capteur CCD.

4.7.3. Citez au moins 3 avantages du spectromètre à fibre optique et capteur CCD par rapport au montage qu'on utilise habituellement et utilisant un goniomètre pour visualiser des spectres en TP.

5. Capteur CCD

5.1. Principe d'un capteur CCD

Le capteur CCD (Charge Coupled Device), interfacé à un ordinateur, réceptionne les différents faisceaux diffractés et fournit un signal électrique reproduisant l'intensité lumineuse perçue par ses pixels répartis sur une longueur L. Il est modélisé par un ensemble de photodiodes reliées à des capacités, puis à un registre à décalage par l'intemédiaire d'interrupteurs.

On étudie dans cette partie la conversion du signal lumineux en signal électrique grâce à une photodiode. La figure 6-1 présente une modélisation simple de la caractéristique $i = i(u)$ d'une photodiode idéale pour la

convention de la figure 6-2. Afin d'utiliser la photodiode en capteur, on la polarise en inverse ($i < 0$ et $u < 0$) en l'insérant dans un montage comprenant un générateur de f.é.m U_0 et une résistance de protection r comme représenté sur la figure 7. Le courant inverse est proportionnel au flux lumineux surfacique ϕ_s qui irradie la photodiode : $I_d = k\phi_s$, où k est la sensibilité de la diode. On suppose que cette sensibilité est indépendante de la fréquence de variation de ϕ_s, dans le domaine habituel de variation.

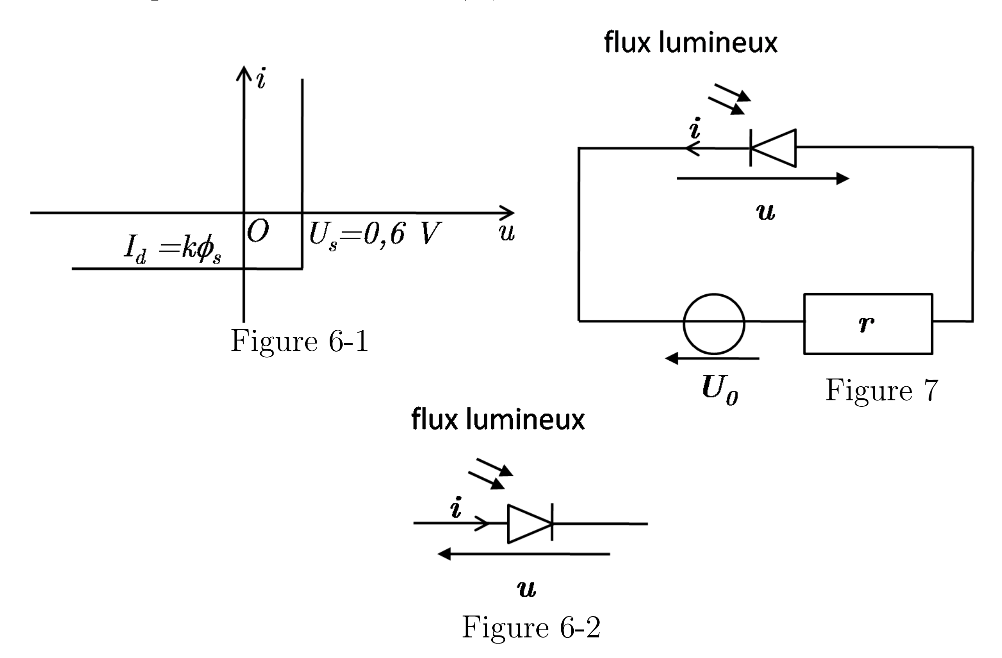


Figure 6-1

Figure 7

Figure 6-2

5.1.1. Montrer que la photodiode ne peut être bien polarisée en inverse que si la résistance r est inférieure à une valeur limite r_0. Exprimer littéralement et numériquement r_0 pour un éclairement $\phi_s = 0,20\,mW.cm^{-2}$. On donne $k = 50\,\mu A.mW^{-1}.cm^2$ et $U_0 = 5,0\,V$.

Dans la suite, on suppose la condition $r < r_0$ vérifiée.
La photodiode polarisée en inverse se comporte comme un générateur idéal de courant $I_d = k\phi_s$ en parallèle avec une capacité C_d.

5.1.2. La photodiode est éclairée par des signaux lumineux variables. Le schéma équivalent de la photodiode et de son conditionnement est présenté sur la figure 8.
Déterminer la réponse harmonique du système définie par $\underline{H} = \dfrac{\underline{V}}{\underline{\phi_s}}$.
Définir le gain statique de ce dispositif.

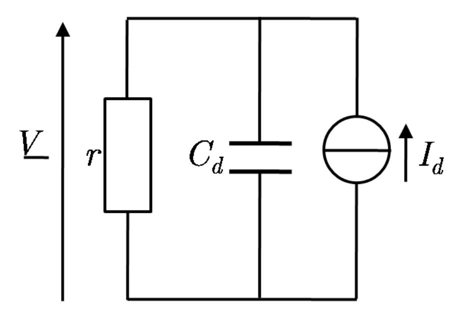


Figure 8

5.1.3. Exprimer littéralement la fréquence de coupure du système. Calculer sa valeur numérique pour $r = 1\,k\Omega$ et $C_d = 10\,nF$.

5.1.4. À quelle fréquence maximale peut-on utiliser ce dispositif pour une perte de moins de 1% par rapport au gain statique ?

5.2. Caractéristiques de la barrette CCD

La barrette CCD linéaire du spectromètre à fibre optique étudié est constituée de $N_p = 2048\, pixels$ répartis sur une longueur $L = 28,7\, mm$. Sa gamme spectrale est $200 - 900\, nm$. On suppose que seul le spectre d'ordre 1 est projeté sur la barrette CCD.

5.2.1. Calculer la taille $t(P)$ d'un pixel.

5.2.2. Quel(s) type(s) de radiation(s) couvre la gamme spectrale du spectromètre étudié ?

5.2.3. On définit la résolution $\Delta\lambda(P)$ d'un pixel en longueur d'onde par l'intervalle de longueur d'onde que couvre un pixel. Déterminer $\Delta\lambda(P)$ en supposant que l'intervalle de longueur d'onde sur la gamme spectrale $\Delta\lambda$ obtenue sur le capteur occupe $N_p = 2048\, pixels$.

5.2.4. On définit arbitrairement la résolution $R_{rés}$ du spectromètre à fibre optique comme l'intervalle de longueur d'onde séparant 3 pixels, calculer la valeur de $R_{rés}$.

5.2.5. La barrette CCD est installée de telle façon que le premier pixel (n°1) reçoit la vibration de longueur d'onde $\lambda_1 = 200\, nm$ et le dernier pixel (n°2048) reçoit la vibration de longueur d'onde $\lambda_2 = 900\, nm$. Établir la relation entre la longueur d'onde λ et le n° de pixel x.

5.2.6. Citer deux facteurs qui pourraient limiter le pouvoir de résolution du spectromètre à fibre optique.

6. Spectre du blanc d'ordre supérieur

On considère un interféromètre de MICHELSON idéal constitué d'un miroir plan fixe (M_1), d'un miroir plan mobile (M_2) réglable en translation et en inclinaison et d'une lame séparatrice (S_p) semi-réfléchissante, non absorbante, d'épaisseur nulle, de facteurs de transmission et de réflexion égaux à 0,5 et n'introduisant aucun déphasage. Cette lame fixe est inclinée à 45° par rapport aux normales à (M_1) et (M_2).

L'interféromètre de MICHELSON est plongé dans l'air d'indice de réfraction égal à 1 et est réglé dans la configuration « contact optique ». On incline le miroir mobile (M_2) d'un petit angle α_0 et on éclaire l'interféromètre en lumière quasi-parallèle à l'aide d'une source étendue (S).

Les franges d'interférence ainsi obtenues sont supposées localisées sur le miroir fixe (M_1). On les projette sur un écran (E) à l'aide d'une lentille convergente (L) de distance focale image $f_2' = 20\, cm$ placée à la distance $d = 2f_2'$ du miroir (M_1).

On rappelle l'expression de l'intensité lumineuse en un point P du plan de localisation en fonction de la différence de matche $\delta(P)$ en ce point :

$I(P) = 2I_0(1+\cos(2\pi\frac{\delta(P)}{\lambda}))$, λ étant la longueur d'onde de la lumière éclairant l'interféromètre de MICHELSON et I_0 une constante.

6.1. Faire un schéma du dispositif théorique. On y fera indiquer le coin d'air et on précisera les deux rayons qui interfèrent.

6.2. On note x la distance d'un point P sur (M_1) à l'arête commune des miroirs (M_1) et (M_2'), image de (M_2) à travers la séparatrice (S_p).

Exprimer la différence de marche $\delta(P)$ en fonction de x. Les interférences observées sont-elles des franges d'égale inclinaison ou d'égale épaisseur ?

Justifier votre réponse et déterminer l'expression de l'interfrange $i_{écran}$ sur l'écran (E).

6.3. Afin de mesurer l'angle α_0, on éclaire l'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air par une source monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 589,3\,nm$. La mesure de l'interfrange sur l'écran donne $i_{écran} = 5\,mm$. Calculer l'angle α_0 du coin d'air.

6.4. Le réglage précédent étant conservé, on éclaire maintenant l'interféromètre de Michelson par une source de lumière blanche. On centre la frange d'ordre 0 dite frange centrale.

6.4.1. Décrire en le justifiant l'aspect des franges que l'on voit sur l'écran (E). Justifier pourquoi on n'observe que quelques franges.

6.4.2. Comment repère-t-on la frange d'ordre 0 ? Est-elle blanche ou noire ? Si elle est noire, expliquer pourquoi.

6.4.3. Loin de la frange d'ordre 0, les franges du coin d'air en lumière blanche disparaissent et l'on observe du « blanc d'odre supérieur ». Justifier cette appellation. Comment distingue-t-on sur le plan spectral entre le blanc d'ordre supérieur et le blanc uniforme d'ordre 0 correspondant au contact optique (teinte plate) ?

6.5. On place, au point P' du plan de l'écran (ce dernier retiré), la fente du spectrophotomètre à fibre optique parallèlement aux franges. On observe des cannelures (absence de lumière). Expliquer ce que cela veut dire. Quelle relation existe-t-il entre la différence de marche δ et la longueur d'onde d'une radiation visible absente du spectre ?

6.6. Le spectromètre étant étalonné comme indiqué dans la question **5.2.5**, on observe des cannelures correspondant aux pixels $x_1 = 1293$, $x_2 = 1109$, $x_3 = 1012$ et $x_4 = 691$. Calculer les longueurs d'ondes correspondantes.

Fin de l'épreuve